

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра дискретной математики

Направление подготовки / специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки: Прикладная математика и компьютерные науки

Внешний билиард вокруг правильного девятиугольника

(бакалаврская работа)

Студент:

Згурский Валерий Дмитриевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Канель-Белов Алексей Яковлевич

(подпись научного руководителя)

Москва 2023

Аннотация

Данная работа посвящена описанию и исследованию свойств внешнего бильярда вокруг правильных многоугольников высшего порядка, в особенности семиугольника. В качестве основной цели был выбран поиск самоподобия и апериодических орбит в таком внешнем бильярде, и адаптация методов, применённых в исследовании других правильных многоугольников, для случая многоугольников высших порядков. Данная работа является частичным ответом на вопросы, заданные на International congress of mathematics 2022 Р. Шварцем.

В результате было найдено самоподобие и апериодическая точка во внешнем бильярде вокруг правильного семиугольника, а также исследована структура внешнего бильярда и преобразования первого возвращения в нём. Также была установлена как минимум счетность количества апериодических орбит на некоторой ограниченной области внешнего бильярда. Кроме этого, был адаптирован и оптимизирован код для исследования структур внешних бильярдов высшего порядка.

Содержание

1	Введение	4
1.1	Общие сведения	4
1.2	Формальная постановка задачи	6
2	Исследуемый объект	10
3	Самоподобия в правильном 9-угольнике	14
3.1	Нижняя часть Z'	14
3.2	Верхняя часть Z'	19
4	Проведенные эксперименты для $n = 7, 9, 11, 13$	24
5	Используемые алгоритмы	25
5.1	Определение эквивалентности перекладываний	25
5.2	Построение графа перекладываний обходом в ширину	27
6	Компьютерные вычисления и их доказательность	29
7	Результаты	31
8	Заключение	32

1. Введение

1.1. Общие сведения

Для любой гладкой строго выпуклой кривой на плоскости можно определить отображение внешности этой кривой в себя, называемое внешним бильярдом. А именно, обозначим кривую γ , и пусть x — точка вне ее. Существуют две касательные к γ прямые, проходящие через x ; выберем одну из них, например правую относительно x , и, отразив x относительно точки касания, получим новую точку $T(x)$:

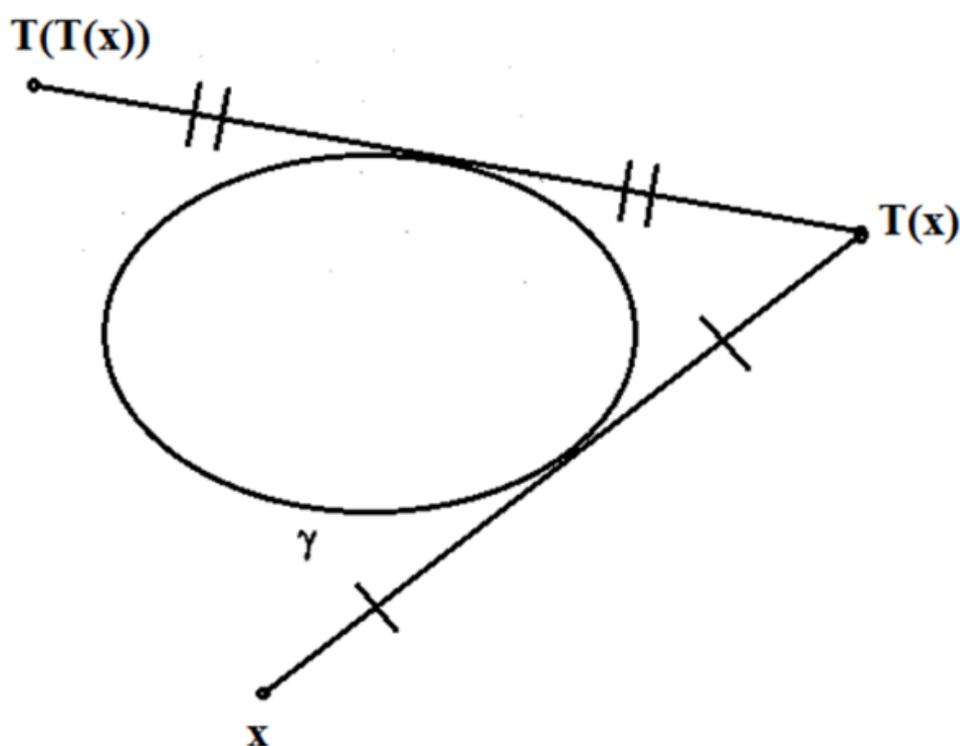


Рис. 1: Определение внешнего бильярда

Отображение T называется внешним бильярдом; кривая γ называется кривой внешнего бильярда. Множество точек $T^n(x)$, где n — неотрицательное целое число, будем называть траекторией, или орбитой, внешнего бильярда точки x относительно стола γ . В данной работе столами являются правильные многоугольники, в основном девятиугольник. В этом случае, точка правого касания определена неоднозначно, если она лежит на соответствующем продолжении одной из сторон стола; будем считать, что для таких точек преобразование внешнего бильярда не определено.

Внешние бильярды являются частным случаем более общей темы - динамических си-

стем. Динамические системы неформально возникли в области Ньютоновской Механики, но формально были в первый раз строго сформулированы А.Пуанкаре в конце XIX века. Внешний бильярд как частный случай динамических систем, был сформулирован Б. Нойманом в середине XX века, но популярность приобрели с публикациями работ [1] Ю.Мозера, где внешний, или двойственный бильярд был рассмотрен как игрушечная модель небесной механики.

Внешний бильярд вне выпуклого многоугольника является классическим примером кусочной изометрии - преобразования на плоскости или любой связной фигуре на плоскости, которое делит фигуру на несколько связных кусков и двигает каждый из этих кусков таким образом, чтобы в совокупности такие куски также образовывали исходную фигуру. Одним из классических методов, позволяющих полностью описать происходящее для некоторых динамических систем самоподобного вида, является обнаружение ренормализационной схемы. Такую схему впервые обнаружил и проанализировал С.Табачников [2][3][4]. Аналогичные схемы предлагались Дж. Х. Лоуенштейном и Ф. Вивальди. [5] а также А.Гетцем и Г.Поггиаспалла [6].

В случае правильных многоугольников самыми простыми случаями являются n -угольники с $n = 3, 4, 6$ [7], которые описываются довольно простыми методами. Следующими по сложности являются $n = 5, 8, 10, 12$ которые были решены [8] с помощью ренормализационных схем. Консенсусом в математической среде считается мнение, что структуры внешних бильярдных для случая $n = 7, 9, 11$ и больше являются концептуально более сложными, и пока нет методов для их описания. Касательно внешних бильярдных вне правильных 7 и 9-угольников, приведем цитату Р. Шварца на Международном Математическом Конгрессе 2022 [9]:

‘The cases $n = 8, 10, 12 \dots$ have a self-similar structure. Without having a reference, I have the sense that the case $n = 7$ is somewhat understood in the sense that there are some regions of renormalization. I think that the cases $n = 9, 11$ are not understood at all.’

Для случая $n = 7$ В. Тимориним и Ф. Руховичем было найдено самоподобие, из которого следует существование так называемых аперiodических точек. Были также обнаружены самоподобия с мультипликативно независимыми коэффициентами. Кроме того, найдена фигура и две подобные ей подфигуры (подобия согласованы с преобразованием первого возвращения) с непересекающимися орбитами. Из этого выводится наличие континуума замкнутых инвариантных множеств, состоящих из аперiodических точек а также существование аперiodической точки с неподстановочной динамикой.

Основным методом исследования структуры внешнего бильярда будут строгие доказательные вычисления, возможные благодаря тому, что в случае правильных многоугольников множество точек границ можно задать элементами конечного расширения поля рациональных чисел. В качестве основы для работы с внешними бильярдами были взяты программы и методы, используемые Ф.Руховичем, они были дополнены, расширены и оптимизированы для случаев высших порядков, поскольку случай $n = 9, 11, 13$ характеризуется большей вычислительной сложностью.

1.2. Формальная постановка задачи

Для постановки задачи нам понадобятся несколько формальных определений.

Определение 1. Отображение точек с проведением ближайшей правой касательной, мы назовём T . Относительно кривой γ . Обратное ему преобразование назовём T^{-1} .

Определение 2. Фигуру γ из определения выше мы будем называть *столом внешнего бильярда*.

Определение 3. Точка $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ называется граничной, если $\exists z \in \mathbb{Z}$, т. ч. $T(p)^z$ не определено.

Определение 4. Точка $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ называется периодической, если $\exists z \in \mathbb{Z}^+$, т. ч. $T(p)^z = p$.

Определение 5. Точка $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ называется аперiodической, если она не является ни граничной, ни периодической.

Традиционные вопросы, которые задаются в случае внешних бильярдов вокруг правильных многоугольников, это -

- 1) Существует ли аперiodическая точка во внешнем бильярде вне правильного n -угольника?
- 2) Образуют ли периодические точки множество полной меры во внешнем бильярде вне правильного n -угольника?

В тексте этой работы будет дано обоснование положительного ответа на первый вопрос в случае $n = 9$ и 18 . На второй же вопрос, как и в случае $n = 7$, ответа пока найти не удалось.

Помимо этих двух вопросов, будет немного более детально исследована структура внешнего бильярда. Для этого нам нужно будет выписать ещё несколько определений.

Определение 6. Пусть γ - правильный n -угольник, с вершинами A_0, A_1, \dots, A_{n-1} . Тогда продлим отрезки $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_0$ как лучи. После этого плоскость вне n -угольника разобьётся на части V_0, \dots, V_{n-1} . Обозначим за V - ту часть, которая образуется лучами A_0A_1, A_1A_2

Определение 7. Пусть R есть поворот на угол $\frac{2\pi}{n}$ по часовой стрелке вокруг центра γ . Заметим, что T инвариантно относительно R , т.е. $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ определено: $T(R(p)) = R(T(p))$. Отождествим точки, переходящие друг в друга с помощью R .

Определение 9. Преобразование $T': V \rightarrow V$ есть преобразование, определяемое следующим образом. Пусть $p \in \text{int}(V)$. Тогда:

- $T'(p)$ определено если, и только если $T(p)$ определено
- Если T' определено, то $T'(p) = R'(T(p))$.

Для удобства будем считать, что T' не определено на границе V .

В дальнейшем мы будем исследовать только (V, T') , потому что согласно Лемме 36 [10] полнота меры периодических, аperiodических точек, а также вычисление периодов точек на $(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$ сводится к тем же задачам на (V, T') .

Определение 10. Пусть X — некоторое множество, а $f : X \rightarrow X$ — некоторое преобразование. Пусть $Y \subset X$. Тогда преобразованием первого возвращения f , или возвращения относительно f , на Y назовем преобразование $f_Y : Y \rightarrow Y$, определенное следующим образом. Пусть $p \in Y$. Тогда $f_Y(p) = f^k(p)$, где $k = k(p)$ — минимальное такое целое положительное число, что $f^k(p) \in Y$. Если такого числа $k(p)$ не существует, то в точке p преобразование $f(p)$ не определено.

Заметим, что из определения никак не следует, как именно будет выглядеть преобразования первого возвращения. Тем не менее, можно создать алгоритм, который будет пытаться представить такое преобразования как перекладывание конечного числа многоугольников на X , такой алгоритм описан под названием `tryMakeFirstReturnMap` [10]. Именно его мы и будем использовать в компьютерных вычислениях.

Определение Преобразование плоскости, при котором для любых двух точек A, B , и их образов A', B' , отношение $\frac{|AB|}{|A'B'|} = k$ постоянно, называется преобразованием подобия. Число k называется коэффициентом подобия.

Определение Пусть $N_1, N_2 \subset V$, g_1, g_2 — преобразования первого возвращения T' на N_1 и N_2 соответственно. Пусть H - преобразование подобия с коэффициентом k , такое что $H(N_1) = N_2$ и $\forall x \in N_1 H \circ g_1(x) = g_2 \circ H(x)$ то преобразования первого возвращения T' на N_1 и N_2 подобны с коэффициентом k .

Определение Пусть $N \subset V$. Если существуют $N_1 \subset N_2 \subset N$, такие что преобразования первого возвращения f на них подобны с коэффициентом, не равным единицы, то в множестве N в динамической системе (V, T') имеет место самоподобие.

Из существования такого самоподобия при наличии некоторых условий вытекает наличие апериодической точки. Фактически наличие самоподобия говорит о некоторой фрактальной структуре внутри T' . В связи с этим представляют интерес следующие вопросы:

- 1) Какие существуют самоподобия в (V, T') ?
- 2) Существуют ли в (V, T') самоподобия с мультипликативно независимыми коэффициентами?

Определение 11. Пусть K - преобразование первого возвращения на X . Тогда траекторией точки $p \in X$, мы назовем $T'(p), T'^2(p), \dots, T'^n(p)$, где n - это минимальное положительное число, такое что $T'^n(p) \in X$.

Определения 12. Назовём множеством траекторий преобразования первого возвращения объединение траекторий для всех $p \in X$.

Лемма Пусть $X \subset Z'$, и $p \in Z'$ и пересекается с множеством всех траекторий первого возвращения X . Тогда орбита p совпадает с орбитой некоторой точки $q \in X$.

Доказательство:

Орбиты различных двух точек либо не пересекаются, либо совпадают, а так как $p \in$ некоторой траектории первого возвращения, то существует некоторое $q \in X$ и натуральное k , такое что $T'^k(q) = p$. Значит p лежит в орбите q , и их орбиты совпадают.

Таким образом на самом деле если мы исследуем орбиты фигуры, то мы исследуем и орбиты всех точек, которые лежат на траектории её первого возвращения. В таком случае, разумным является исследовать только те перекладывания, которые не покрыты траекториями первого возвращения, если мы хотим найти новые структуры и орбиты.

Также приведем план успеха, который сработал в случае $n = 5, 8, 10, 12$, чтобы доказать, что множество периодических точек имеет полную меру:

1. Найдем фигуру X , которая имеет в себе самоподобие, причем траектории подобной фигуры внутри неё покрывают всю эту фигуру, кроме каких-то периодических фигур.
2. Применить лемму 55[10], чтобы показать, что в таком случае множество периодических точек в этой фигуре имеет полную меру.
3. Далее проверить, что одна или несколько фигур X с такими свойствами своими траекториями первого возвращения покрывают всё Z' .

Заранее скажем, что повторить успех для случаев $n = 7, 9$ таким образом не получилось, из-за того что в определённых областях Z' не находится самоподобий, которые могли бы покрыть эти области своими траекториями. Тем не менее в данной работе мы опишем те области, где нам найти хорошие самоподобия удалось.

Благодарности. Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук федеральному профессору А.Я.Канелю-Белову за постановку задачи, помощь в написании научной работы и всестороннюю поддержку.

Автор благодарит Ф.Д. Руховича и В.А. Тиморина за помощь в технической части, предоставленное программное обеспечение, использованное для семиугольника, и консультации по предыдущим работам в области внешних билиардов.

Также автор благодарит за внимание и обсуждение работы академика РАН профессора А.Л.Семенова.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00177

2. Исследуемый объект

Введём следующие обозначения, взяв $n' = \frac{n}{2} = \frac{9}{2} = 5$

Определение 13. Обозначим как P_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n' - 1$, точку пересечения A_0A_1 и $A_{i+1}A_i$, а как Q_j , $j = 2, 3, \dots, n'$ - точку пересечения A_1A_2 и $A_{j+1}A_j$. В частности $A_1 = P_1$, $Q_2 = A_2$.

Легко понять, что преобразование T' является кусочным движением, и для $n = 9$, состоит из n кусков, перекладывающихся согласно рисунку. Формальным доказательством этого служит Лемма 22 в работе Ф.Руховича [10].

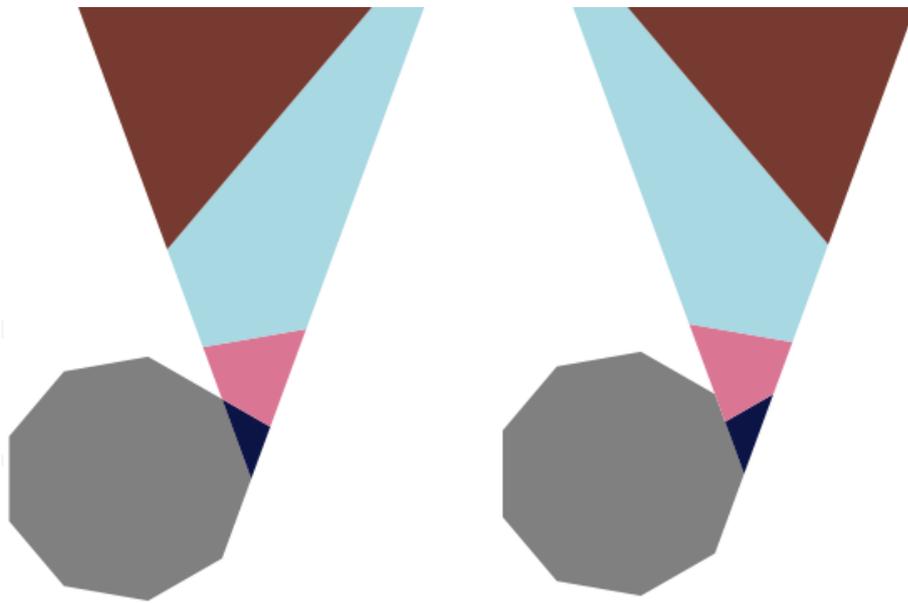


Рис. 2: Начальное перекладывание

Определение 14 Обозначим как β - правильный 18-угольник, описанный вокруг точки O_3 , вписанный в бесконечный многоугольник α_4 , причем точки P_4 и Q_5 являются его вершинами.

Таким образом, β разбивает V' на два многоугольника Z' и Z'' , легко показать, что они инвариантны относительно T' .

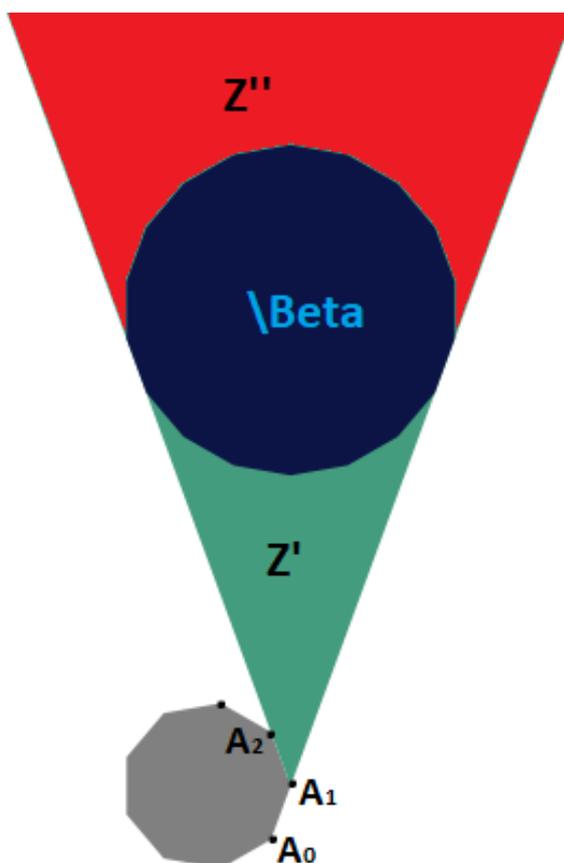


Рис. 3: Разбиение на компоненты

Более того, согласно [10], верна следующая лемма

Лемма

1. Аперриодическая точка $q \in V$, существует, если и только если существует аперриодическая точка $p \in Z''$.
2. Периодические точки образуют внутри V множество полной меры, если и только если периодические точки образуют множество полной меры внутри Z'' .

Таким образом, на самом деле достаточно исследовать Z' , чтобы ответить на вопросы, сформулированные в начале статьи. Более того, на самом деле динамические системы (Z', T') и (Z'', T'') в некотором смысле эквивалентны, но мы не будем подробно погружаться в эту тему.

Определение 15. Назовём стартовое перекладывание Z' возможным. Также, если перекладывание "возможное", то если преобразование первого возвращения на какой-то из кусочков его перекладывания (а точнее стартовую позицию этого кусочка) тоже является перекладыванием, то это перекладывание тоже "возможное".

Определение 16. Определим ориентированный граф преобразований первого возвра-

щения (V, E) следующим образом.

- V - множество классов эквивалентности "возможных" перекладываний. Перекладывания считаются эквивалентными, если одно перекладывание подобно другому
- E - для перекладывания u рассмотрим преобразования первого возвращения на кусочки этого перекладывания. Если такое п.п.в. тоже является перекладыванием v (поскольку оно по определению тоже "возможное"), то ребро (u, v) принадлежит E .

Исследуя данный граф, можно понять структуру внешнего бильярда вокруг правильного n -угольника. Для того чтобы понять траекторию конкретной точки, достаточно в данном графе следовать по пути, согласно расположению этой точки относительно её путей. Кроме того, конечный граф первого возвращения даёт возможность полностью описать структуру преобразования первого возвращения. Для случаев $n = 5, 8, 10, 12$ удалось получить полный граф преобразований первого возвращения, для $n = 7, 9, 11$, удалось получить некоторые оценки на его размеры. Полученные данные приводятся в следующей таблице:

n	5	7	8	9	10	11	12
Количество вершин в графе	12	≥ 832	9	≥ 211	13	≥ 65	44

Меньшие оценки на число вершин для случаев $n = 9, 11$ по сравнению с $n = 7$

обосновываются тем, что для них вычисления становятся значительно более сложными из-за большего количества кусочков в перекладывании и итераций.

Определение 17 Назовём $A \subset B \subset Z'$ изолированной от прямых, если для любой прямой, проходящей через A , найдётся периодическая компонента в B , которую она пересекает.

Теорема 1. Пусть в динамической системе (Z', T') существует самоподобие H между преобразованиями первого возвращения на $A_2 \subset A_1 \subset Z'$, причем A_2 лежит внутри A_1 с некоторой окрестностью, A_2 является изолированной от прямых в A_1 .

Тогда в (Z', T') существует аперодическая точка, и она равна $\lim_{n \rightarrow \infty} H^n(A_1)$, где $H' = H \circ T'^{-1} \circ H \circ T$.

Доказательство:

В целом аналогичные доказательства проводились в работах для конкретных самоподобий. Проведём его чуть более обще. Для начала, такой предел существует, потому что это вложенные открытые множества, значит в их пересечении есть хотя бы одна точка.

Лемма. p_{inf} - не является периодической точкой.

Доказательство:

Пусть это так. Тогда рассмотрим её компоненту, открытое $\text{comp}(p)$, которая тоже периодическая с теми же кодами. Но тогда $\exists n G^n(P_i) \subset \text{comp}(p)$, поскольку их площадь стремится к нулю. Но тогда мы получаем противоречие, поскольку внутри перекладываний есть точки с разными кодами.

Лемма. p_{inf} - не граничная точка.

Доказательство:

Пусть p_{inf} - граничная точка. Тогда согласно Лемме 2[10] любая граничная точка содержится в некотором открытом отрезке, состоящем целиком из граничных точек. Пусть тогда p_{inf} содержится в некотором таком отрезке длины $2l$, причем является его серединой. Тогда рассмотрим прямую, содержащую этот отрезок.

Поскольку она пересекается с некоторой периодической компонентой в A_2 (которая целиком состоит из периодических точек), то $1 \leq \text{diam}(A_1)$. Но тогда заметим, что если $A \subset B$ изолированно от прямых в нём, то $\forall H$ - преобразования подобия, $H'(A) \subset A$ будет изолированно от прямых в A . Значит, $\forall n \geq 0$ $1 \leq \text{diam}(H^n(A_2)) \rightarrow 0$. Получаем что $1 = 0$, противоречие.

Согласно определению, и доказанным двум леммам, p_{inf} не является ни периодической, ни граничной, значит она аperiodическая в данной динамической системе. Значит теорема доказана.

Заметим, что условие на изолированность от прямых играет ключевую роль в проверке на то, что точка не является граничной, и в целом свойство является довольно сложным. Тем не менее в случае преобразований первого возвращения вне внешних бильярдов это свойство легко проверяется (за счет того что мы можем эффективно находить периодические компоненты во внешнем бильярде) и почти всегда выполняется, за исключением подфигур, которые лежат на границе исходной фигуры.

3. Самоподобия в правильном 9-угольнике

3.1. Нижняя часть Z'

Для поиска самоподобия во внешнем бильярде вне правильного девятиугольника рассмотрим для начала стартовое переключивание на Z' .

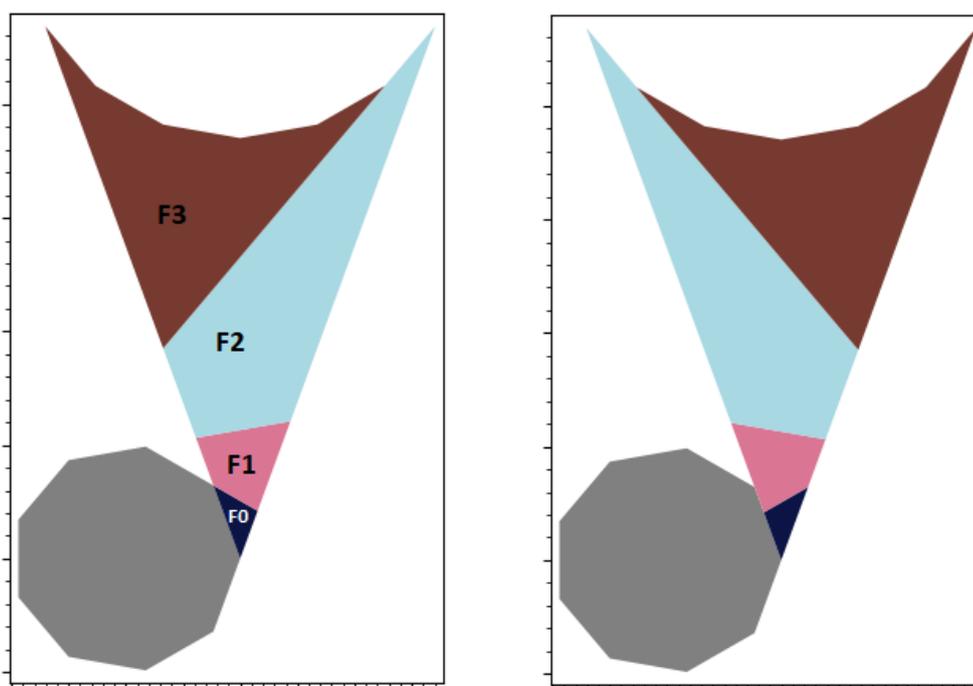


Рис. 4: Начальное переключивание

Далее рассмотрим преобразование первого возвращения на нижний тёмно-синий треугольник F_0 , относительно этого переключивания.

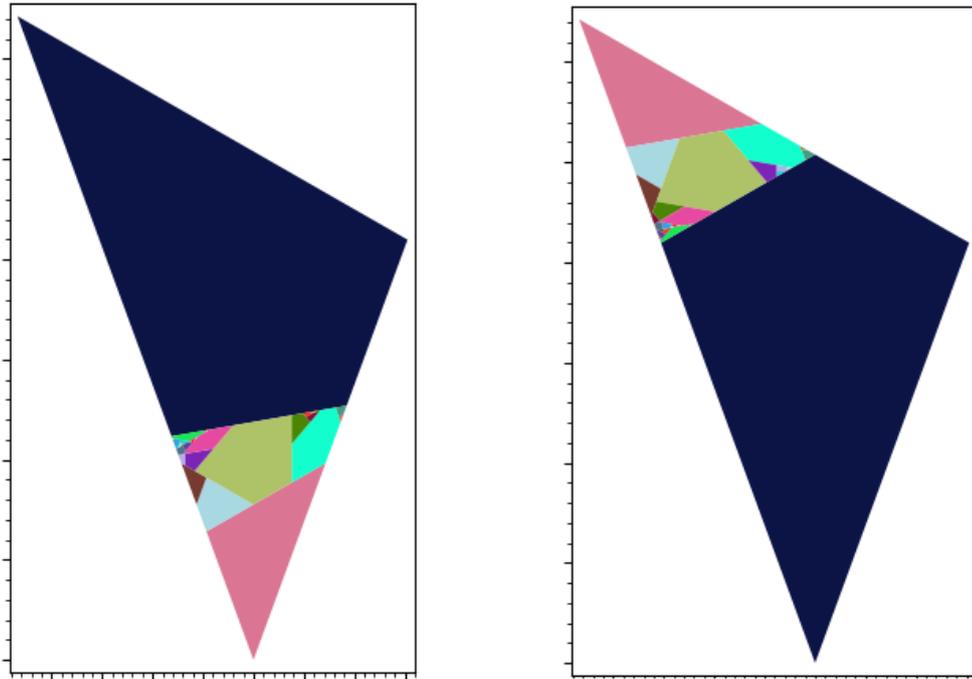


Рис. 5: Преобразование первого возвращения на нижний треугольник

Это переключивание значительно более сложное по структуре, и не является ручным. Полное количество итераций, которое потребовалось, чтобы все кусочки вернулись в треугольник, равно 194. Далее вновь рассмотрим преобразование первого возвращения на нижнем кусочке, являющимся розовым треугольником.

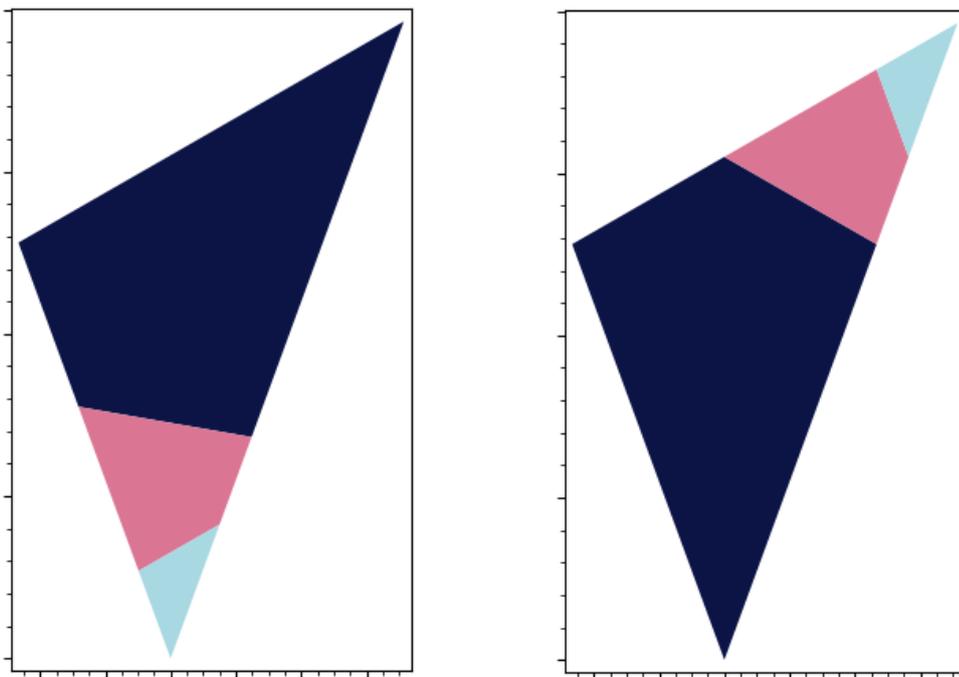


Рис. 6: Второе преобразование первого возвращение

Это перекладывание более простое, рассмотрим вновь преобразование первого возвращения на нижнем кусочке.

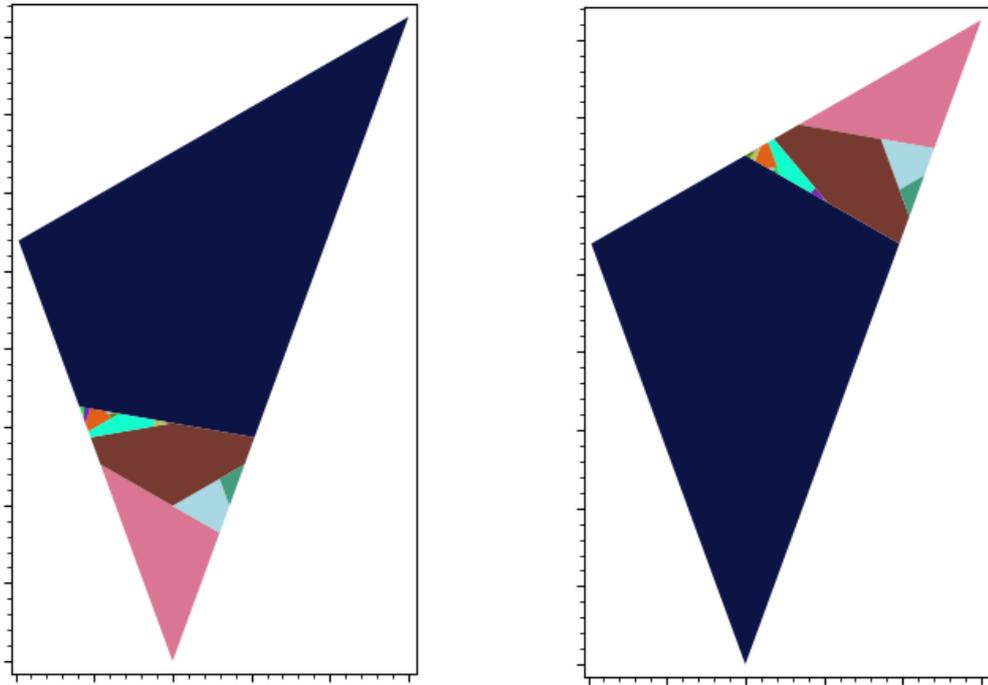


Рис. 7: Третье преобразование первого возвращения

Можно заметить, что это перекладывание очень похоже на то, что получилось на втором шаге, однако они не подобны - в них разное количество кусочков, 35 и 15 соответственно. Тем не менее если мы вновь рассмотрим преобразование первого возвращения на нижнем кусочке

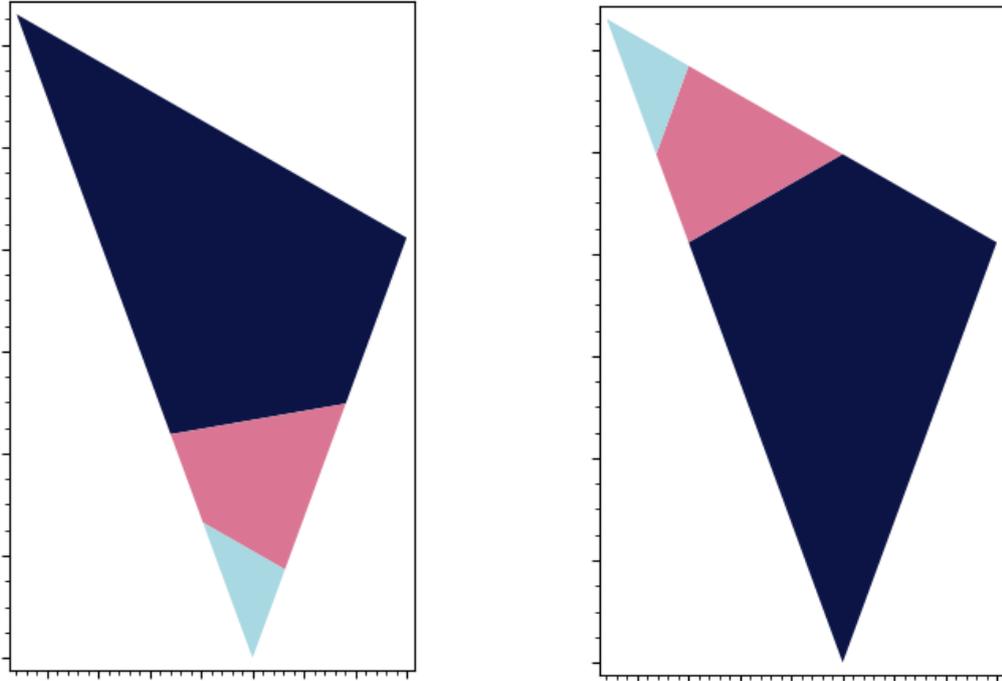


Рис. 8: Четвертое переключивание, подобное второму

Легко заметить, что это переключивание подобно третьему (нужно применить симметрию и растяжение). Коэффициент самоподобия у этих переключиваний будет равен $2*\alpha^4 - 8*\alpha^2 + 1$, где $\alpha = \cos(\frac{\pi}{9})$. Более того, если рассмотреть траекторию возвращения этой фигуры, то в ней находятся фигуры, изолированные от прямых (что проверяется алгоритмически), и применяя к ним Теорему 1, мы понимаем, что во внешнем билиарде вне правильного девятиугольника существует апериодическая точка.

В дополнение к этому, используя Леммы 35, 36 [10], также верно, что апериодическая точка существует и во внешнем билиарде вне правильного 18-угольника.

Теперь, когда мы нашли самоподобие, мы можем попытаться описать остальную часть внешнего билиарда.

Теперь рассмотрим траектории первого возвращения на пути к нашему самоподобию.

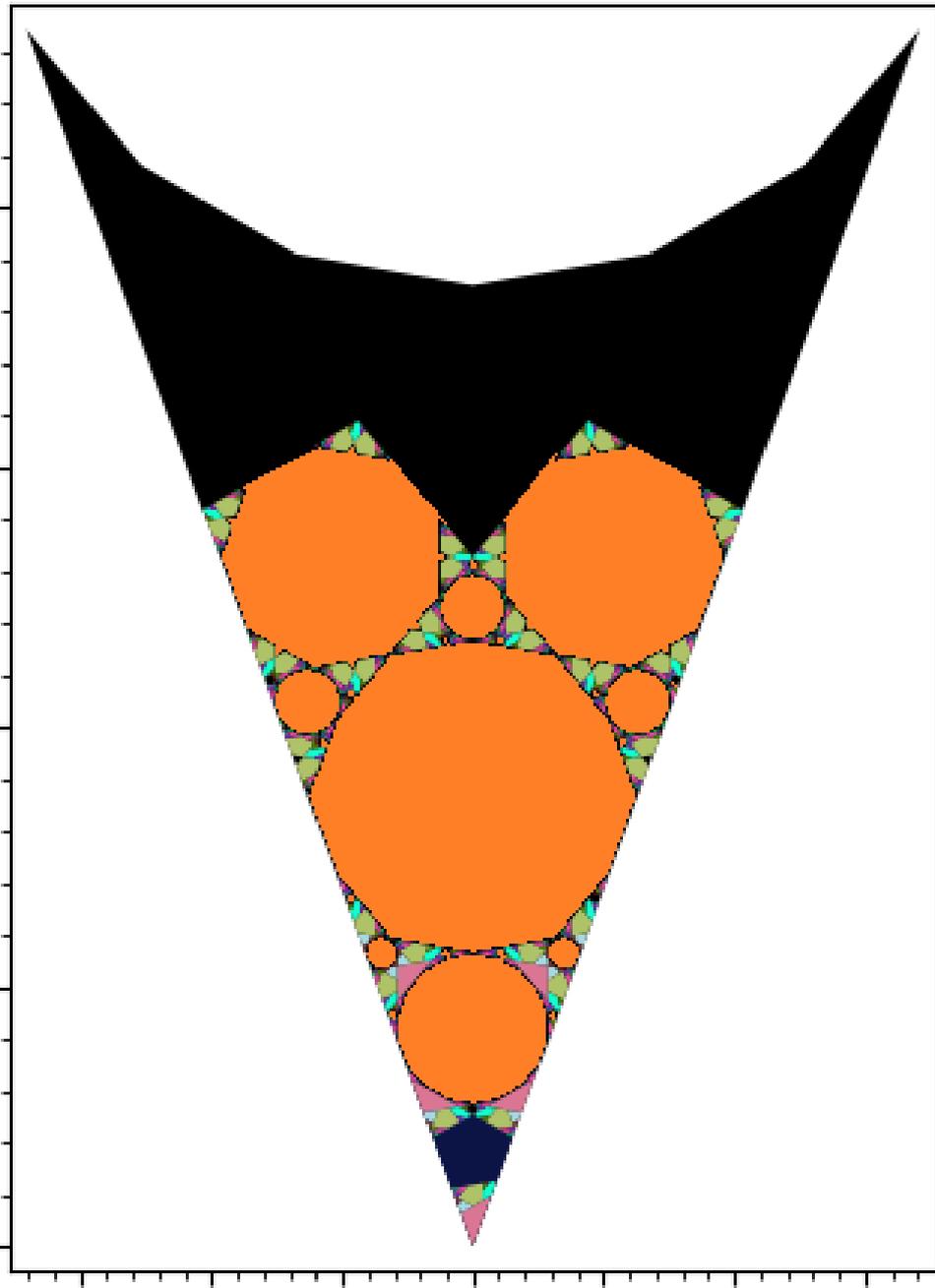


Рис. 9: Траектории возвращения первой фигуры + периодические компоненты (оранжевые)

Уже в первой фигуре мы видим, что траектории первого возвращения покрывают не всю Z' . Если мы запустим алгоритм, то дополнительно заметим инвариантные компоненты в виде многоугольников, однако они все равно не покрывают фигуру полностью, что оставляет возможность исследовать верхнюю часть Z' .

Для порядка приведем траектории первого возвращения на пути к первому самоподобию.

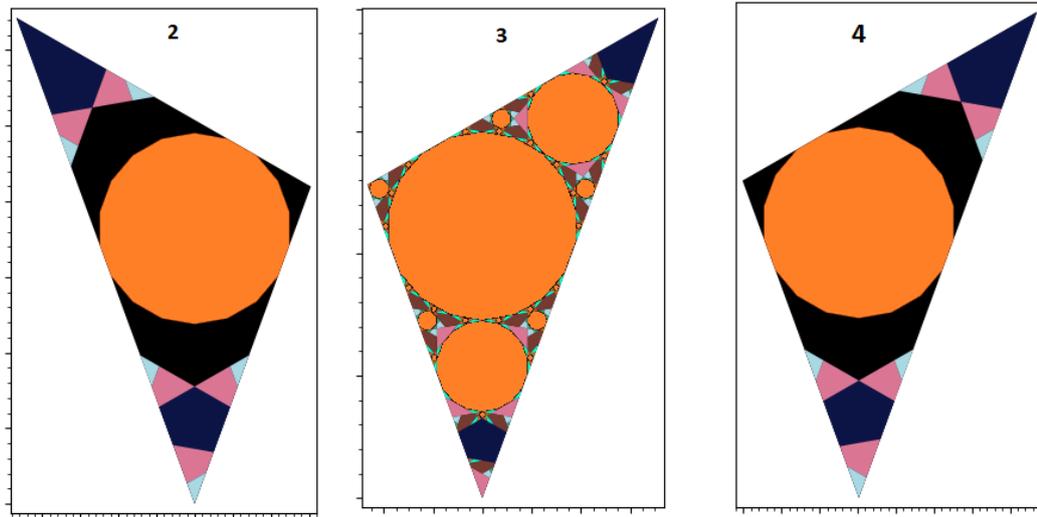


Рис. 10: Траектории возвращения первой фигуры + периодические компоненты (оранжевые)

На всех рисунках кроме второго мы видим, что остаются темные области, которые не покрываются ни большими периодическими компонентами, ни траекториями возвращения исследуемых фигур.

При попытке исследовать тёмные области начинают генерироваться всё более и более сложные преобразования первого возвращения, найти в которых какую-то структуру не удалось. Примеры таких преобразований приведены в главе про эксперименты.

3.2. Верхняя часть Z'

Поскольку это направление целиком исследовать не удалось, эта темная область была пока что оставлена в покое, и было предпринято несколько исследований в верхней части Z' . Чтобы не загромождать статью картинками, далее мы будем приводить только разбиение фигуры на подфигуры, которые будут образовывать перекладывание первого возвращения. Применив поиск преобразования первого возвращения к четырехугольнику F2, а далее последовательно два раза применив преобразование первого возвращения к самой верхней фигурке, мы получаем следующие картинки.

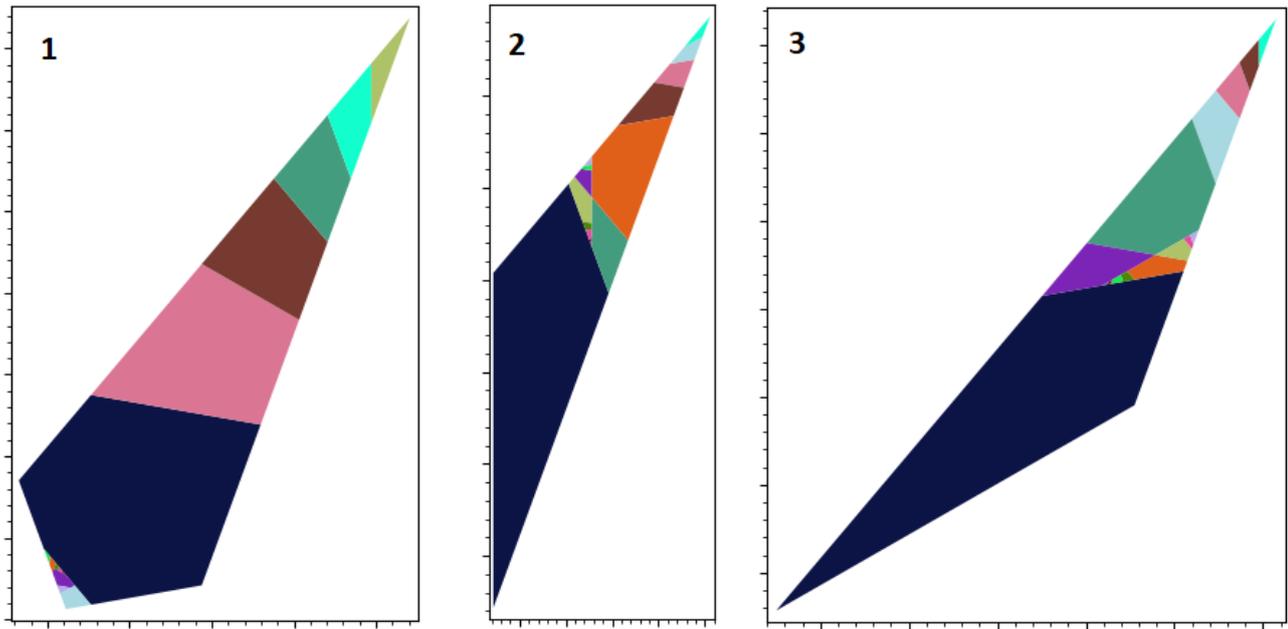


Рис. 11: Результаты применения преобразования первого возвращения

Можно заметить, и проверить алгоритмически, что преобразования первого возвращения 2 и 3 с вышеприведенного рисунка, на самом деле образуют самоподобие с тем же коэффициентом, что и в ранее рассмотренном случае. Более того, если рассмотреть преобразование первого возвращения фигуры 2, а также нескольких периодических компонент фигуры 1, можно получить следующее покрытие Z'

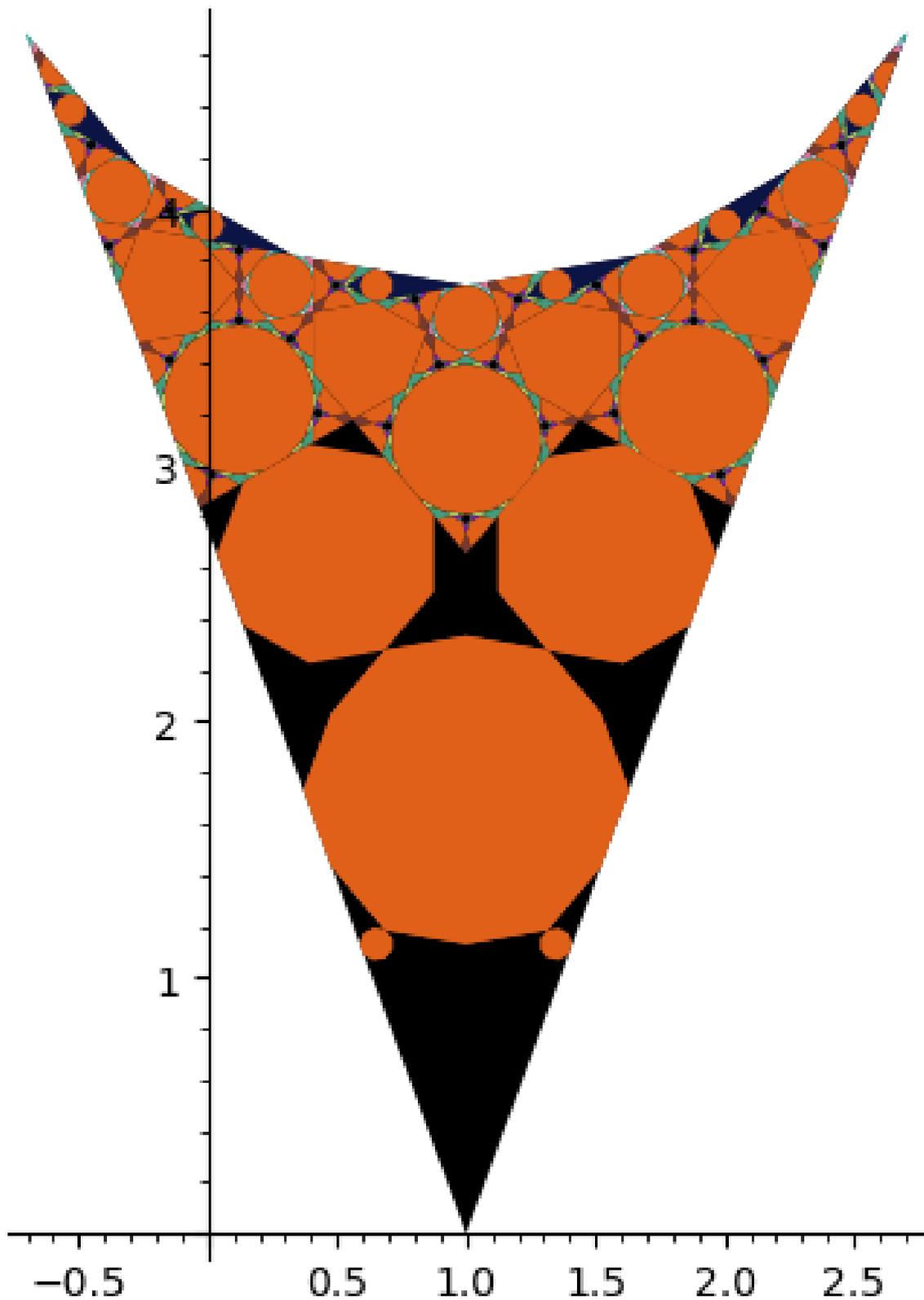


Рис. 12: Оранжевое - траектории периодически фигур, остальное - траектории разбиения фигуры 2

Можно заметить, что вместе с траекториями, указанными на рисунке 9, эти траектории покрывают всё Z' . Таким образом, мы свели изучения внешнего бильярда на

Z' к изучению внешнего бильярда на двух фигурах, указанных на рис 5 и номер 2 на рис 10.

К сожалению, как и с первой фигурой, эту мы не сможем описать полностью, с помощью самоподобий. Тем не менее, в фигуре 2 возможно найти ещё одно самоподобие, не пересекающееся с траекториями уже найденного. Для этого надо рассмотреть преобразование треугольника, указанного ниже

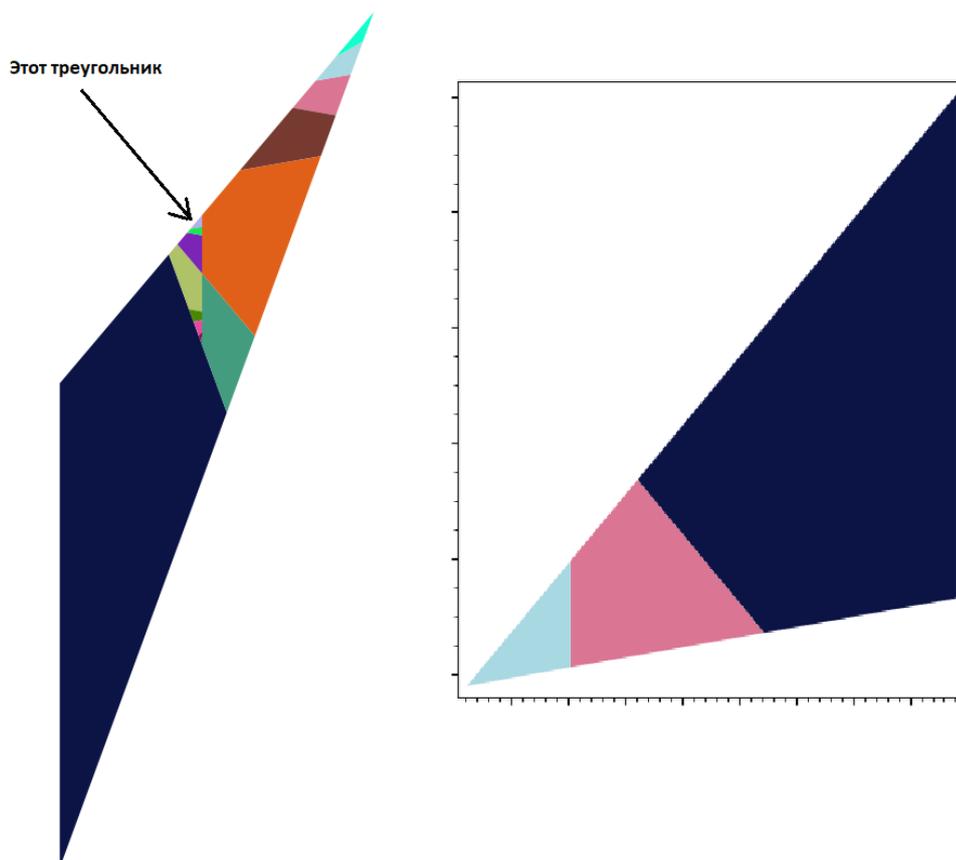


Рис. 13: Оранжевое - траектории периодически фигур, остальное - траектории разбиения фигуры 2

Мы нашли внутри фигуры 2 подобную Рис.6 фигуру, причем их траектории не пересекаются. Таким образом мы получили две фигуры - красную и синюю. В красной фигуре есть синяя подфигура, а также подобная ей красная. В синей же из уже доказанного есть подобная ей синяя подфигура.

Тогда верна следующая теорема:

Теорема В случае девятиугольника, существует ограниченная область X , на которой расположено как минимум счетное количество различных аперiodических орбит.

Доказательство:

Перейдем от $(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma, T)$ к (V, T') . Рассмотрим $X = Z'$. Будем идти по самоподобию фигуры 2. В каждой такой фигуре, есть своя подфигурка, подобная рис.6, при этом мы уже знаем что в такой фигуре существует как минимум одна апериодическая точка. Пусть это точка p_1 , теперь применим преобразования подобия и перейдем в фигуре 2 к подобной ей подфигуре, где тоже найдется подфигура подобная рис.6, в которой найдется апериодическая точка p_2 . Будем продолжать так делать. Заметим, что множество $p_n, n \in \mathbb{N}$ - счетно, при этом орбиты этих точек не пересекаются, потому что мы знаем что траектории возвращения их надфигур не пересекаются. Значит если рассмотреть их орбиты, то их счётное число, и при этом они различны. Теорема доказана.

Также если рассмотреть в фигуре 2 с рис 11. траектории первого возвращения найденных фигур и простых периодических компонент, мы получим следующее:

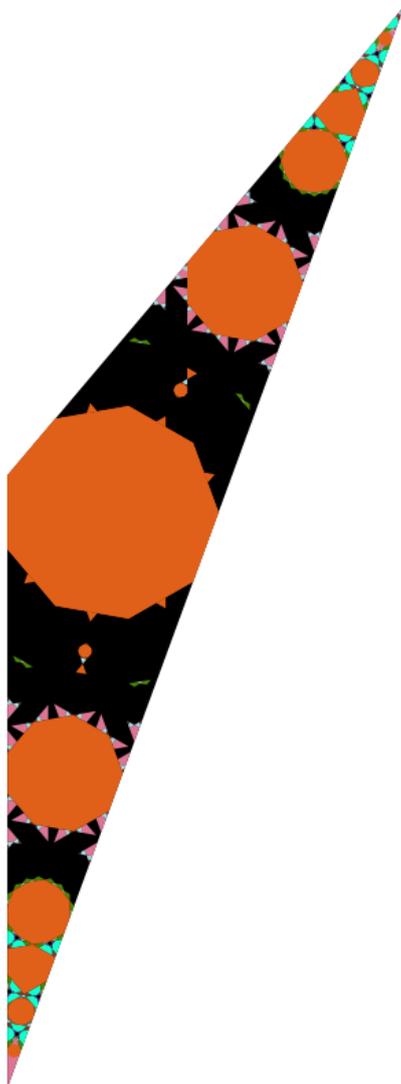


Рис. 14: Оранжевое - траектории периодически фигур, остальное - траектории разбиения фигуры 3 и m

Как и в предыдущем случае, хорошо описать тёмную область, явно видную на картинке, не получилось. Эксперименты по изучению преобразования первого возвращения в ней записаны в следующей секции. Тем не менее даже уже найденные самоподобия и траектории позволяет установить наличие счетного количества аperiodических траекторий и свести изучение внешнего бильярда на Z' к изучению внешнего бильярда на фигурах X и Y [указать правильно].

4. Проведенные эксперименты для $n = 7, 9, 11, 13$

Существует гипотеза, что самоподобие (а соответственно и аperiodическую точку), можно найти, все время следуя в графе преобразований первого возвращения в нижнюю фигуру. Эта гипотеза была экспериментально подтверждена для $n = 5, 7, 8, 9, 10, 12$, т.е. для всех нетривиальных случаев, где поиск самоподобия вообще достиг успеха. Тем не менее для $n = 11, 13, 15, 16$ данную гипотезу проверить не удалось, потому что начиная с этих n количество кусочков в преобразовании первого возвращения начинает становиться слишком велико, как и количество итераций, в связи с чем пойти достаточно глубоко не удалось. Приводится следующая таблица с количеством кусочков в перекладывании и итераций, требуемых для завершения преобразования первого возвращения:

Для $n = 7$, как для более простого случая чем $n = 9$ были проведены попытки исследовать конечность графа первого возвращения для внешнего бильярда, которые не привели к существенным результатам, но для полноты картины их результаты приводятся ниже:

1. При попытке строить граф обходом в ширину было найдено несколько самоподобий, было обнаружено около 800 вершин, но полного построения графа достичь не удалось.
2. При попытке строить граф в глубину с различными эвристиками, довольно быстро алгоритм доходит до довольно сложных перекладываний большого размера, которые обработать он уже не может. Самоподобия при таком обходе практически не встречаются.
3. При попытке обходом в ширину в первую очередь обходить наиболее простые перекладывания (как с точки зрения количества элементов в нем, так и с точки зрения простоты домена перекладывания) получается картина похожая на п.1, единственное что появляются

некоторые соображения в пользу того, что ”простых” перекладываний в таком графе возможно какое-то конечное число.

Также для случая $n = 7, 9$ впервые появляются довольно хаотичные перекладывания, в которых не прослеживается хорошей структуры. При попытке их исследовать алгоритмом поиска преобразования первого возвращения никаких результатов достигнуть не удалось, но количество кусочков начинает быстро расти за сотни, и за несколько сотен тысяч итераций такие перекладывания не сходятся.

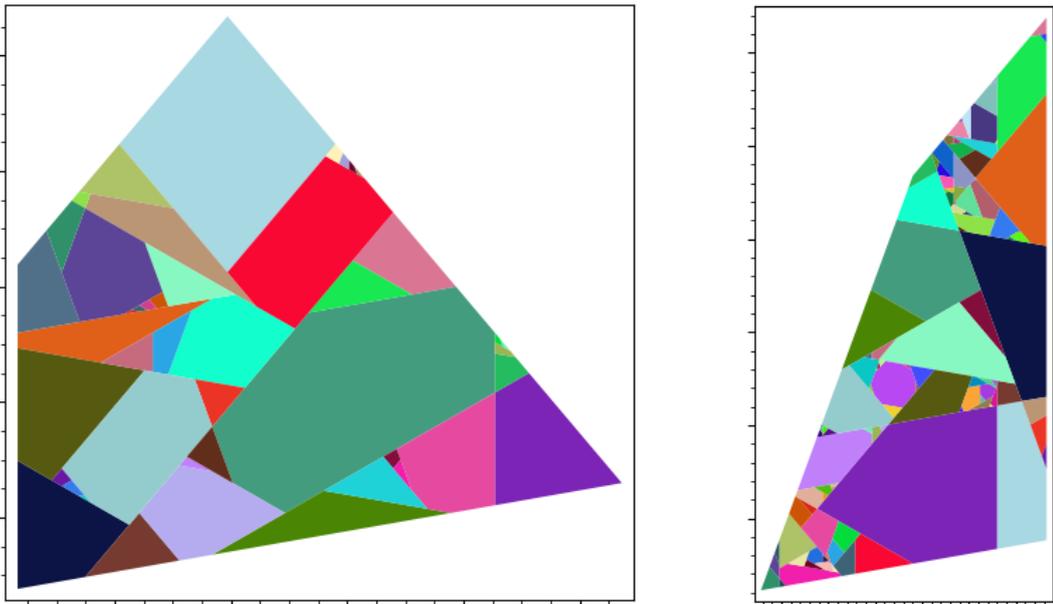


Рис. 15: Пример ”хаотичных перекладываний”

Примеры таких перекладываний возникают, если попытаться исследовать тёмные области, возникшие во время поиска самоподобий.

5. Используемые алгоритмы

5.1. Определение эквивалентности перекладываний

Для начала, рассмотрим алгоритм, которые проверяет, существует ли преобразование подобия, которое переводит одну ПЕТ в другую, а также возвращает само это преобразование.

Входные данные:

ПЕТ1, ПЕТ2 - объекты класса ПЕТ, которые обладают следующими полями:

domain - область на которой определено перекладывание, задано в виде многоугольника че-

рез координаты его точек

splitting-before - перекладывание многоугольников ”до” в преобразовании первого возвращения

splitting-after - перекладывание многоугольников ”после” в преобразовании первого возвращения

GetTransformation - функция, которая по двум отрезкам выдает преобразования подобия в виде композиции движения и гомотетии, которая переводит первый отрезок во второй

Выходные данные: Преобразование подобия, переводящее одну PET в другую, и None, если такого не существует

```
function AreSimilar(PET1, PET2):
    if size(PET1.domain) != size(PET2.domain):
        return None
    firstSizes = [size(polygon) for polygon in PET1.splitting_before]
    secondSizes = [size(polygon) for polygon in PET2.splitting_before]
    if sorted(firstSizes) != sorted(secondSizes):
        return None
    for additional_transfrom in [Id, XSymmetry]:
        for vertex in PET1.domain:
            for second_vertex in [next(PET1.domain, vertex), prev(PET1.domain,
                targetPet := additional_transfrom.Apply(PET2)
                sourceSegment := Segment(vertex, second_vertex)
                finalSegment := Segment(targetPet.domain[0], targetPet.domain[1])
                transformation := GetTransformation(sourceSegment, targetSegment
                    + additional_transfrom
                if transformation.Apply(PET2) == PET1:
                    return transformation
    return None
```

Лемма. Данный алгоритм корректно проверяет, что существует преобразование подобия, и находит его, если оно существует.

Доказательство:

Для начала в простую сторону, если такого преобразования подобия не существует, то тогда transformation - это преобразование подобия, так как является композицией движения

и гомотетии, и, следовательно, проверку не пройдет и ответ будет None.

В обратную сторону, пусть существует преобразование подобия G , что $G(PET1) = G(PET2)$. Тогда $A = G(PET1).domain = G(PET2).domain = B$. Очевидно, что если количество вершин в A и B не совпадает, то они не подобны. Очевидно также, что количество многоугольников в перекладывании тоже должно совпадать. Теперь после применения симметрии, у нас должен $G'(A) = G'(B)$, где G - композиция растяжения, поворота и смещения координат. В таком случае рассмотрим вершины $A[0]$ и $A[1]$, они соседние в A и так как $G(A) = G(B)$ то $G(A[0]) = G(A[1])$ соседние и в B . Более того, две точки единственным образом задают преобразование подобия, значит если мы переберем все возможные соседние пары точек из B , в которые переходят $A[0]$, $A[1]$, то мы получим все возможные преобразования, подобия, которые могут переводить A в B . Значит есть подобное преобразование подобия существует, то алгоритм его найдёт, проверит его корректность и предъявит его.

Теперь, когда у нас есть алгоритм, автоматически проверяющий подобие перекладываний, появляется возможность предъявить следующий алгоритм, который строит граф из определения.

5.2. Построение графа перекладываний обходом в ширину

Входные данные:

StartPET - начальное перекладывание

OnePetTimeLimit - ограничение по времени на поиск одного преобразования первого возвращения

Выходные данные:

Граф G - граф всех генерируемых перекладываний

```
function GetPETSGraph( StartPET , OnePetTimeLimit ):
```

```
    G := графизоднойвершины    StartPET
```

```
    PETS = { StartPET }
```

```
    Queue = { StartPET }
```

```
    while not Queue.Empty():
```

```
        current_PET = Queue.pop()
```

```
        for polygon in current_PET.splitting_before:
```

```
            polygon_PET, finished = current_PET.TryFirstReturnMap(current_PET, polygon)
```

```
            if !finished:
```

```

        continue
    similar_to = None
    for PET in PETS:
        if AreSimilar(polygon_PET , PET):
            similar_to = PET
            break
    if similar_to is None:
        G.AddVertex(polygon_PET)
        G.AddEdge(current_PET , polygon_PET)
    else :
        G.AddEdge(current_PET , similar_to)

return G

```

Теоретически алгоритм можно использовать и без ограничения по времени, но этому препятствуют сразу два фактора:

- 1) В 7 и 9 угольниках начинают появляться части графа, которые рассчитываются очень долго (несколько часов), и количество кусочков в которых становится равным нескольким сотням или тысячам. Полностью строить было бы слишком долго, и к тому же, не слишком полезно.
- 2) Формально, нам не гарантируется, что алгоритм, который строит карту первого возвращения, завершится за конечное время, нам лишь гарантируется, что если он завершился - значит карта корректна.

Таким образом, применяя алгоритм X с различными стартовыми переключиваниями и ограничениями по времени, можно строить различные куски графа переключиваний и искать в нём интересные для нас структуры.

Формально, ничего не мешает использовать обход в глубину, вместо обхода в ширину, но на практике это столкнулось со следующими трудностями:

- 1) При попытке идти случайно внутрь графа сложность переключиваний начинает довольно быстро увеличиваться.
- 2) Кроме того, как следствие первого пункта, при случайном обходе самоподобия возникают редко, из-за меньшей вероятности совпадения двух больших переключиваний.

Придумать какую-то хорошую эвристику, которая позволила бы обходить только нужные

вершины в рамках данной работы не удалось. С другой стороны это дало данные о том, как может выглядеть граф переключиваний. Вот таблица размеров графа переключиваний для различных n .

Предположительно, граф для $n = 7, 9$ должен быть либо значительно больше, чем для других размерностей, либо бесконечен, что тоже кажется достаточно вероятным.

6. Компьютерные вычисления и их доказательность

Определение 18 Введём $\theta = \cos(\pi/9)$. Несложно показать, что координаты многоугольника, а также все пересечения образующих его прямых, лежат в поле рациональных чисел, расширенным с помощью θ . Назовем это поле $\mathbb{Q}[\theta]$.

Для случаев $n = 7, 11, 13$ и так далее соответственно брались $\theta_n = \cos(\pi/2n)$, и соответствующее поле $\mathbb{Q}[\theta_n]$.

Все вычисления, использованные в программе, происходили в этих полях. Использовался модуль Sage и структура данных NumberField, в которой точно представляются элементы этого поля (что возможно благодаря тому, что это конечное расширение этого поля).

Определение 19 Назовём прямую вычисляемой, если она содержит хотя бы две различные точки $\in \mathbb{Q}[\theta]$.

Лемма Если две вычисляемые прямые пересекаются, то точка их пересечения $\in \mathbb{Q}[\theta]$.

Определение 20. Будем называть многоугольник вычисляемым, если все его вершины являются вычисляемыми точками.

Лемма Все многоугольники, которые образуются при вычислении графа первых возвращений, являются вычисляемыми.

Доказательство:

Очевидно, что начальный многоугольник, вокруг которого происходит внешний бильярд, вычисляемый. Точки многоугольников в стартовом переключивании образуются пересечениями либо прямых, образующих внешний бильярд, либо его биссектрис, которые являются вычисляемыми прямыми, поскольку мы берем угол как раз в половину угла нашего многоугольника.

Следовательно, в начальном переключивании все многоугольники вычислимы. По-

скольку последующие многоугольники получаются всего лишь операциями многократных пересечений многоугольников и их движений относительно друг друга, они также будут вычислимыми, QED.

Также были значительно ускорены вычисления для подсчета преобразования первого возвращения. Для этого:

- 1) В большинство модулей было добавлена отдельная обработка случаев, когда все многоугольники в перекладывании выпуклые (таких на самом деле большинство)
- 2) Было добавлено кэширование так называемых "Геометрических графов", используемых для подсчета пересечений многоугольников.

Вот сводная таблица, показывающая ускорение вычисления различных преобразований первого возвращения:

Задача/Версия кода	Исходный код,сек	С sage и добавлением кэширования, сек	С обработкой выпуклых случаев, сек
Поиск самоподобия в 7-угольнике для нижнего треугольника по известной траектории	1424,4	168,2	30,4
Поиск самоподобия в 9-угольнике для нижнего треугольника по известной траектории	1923,5	210,2	108,5
Построение преобразования первого возвращения для случайной <u>хаотичной</u> области в <u>девятиугольнике</u>	>= 10800,0	2007,4	440,1
Поиск преобразования первого возвращения для первого треугольника в 11-угольнике	>= 10800,0	1670,5	1157,3

Рис. 16: Таблица со сравнительной производительностью кода

7. Результаты

В результате доказательств и компьютерных вычислений, мы получили следующие теоремы, которая являются основным результатом статьи.

Теорема 1 Во внешнем бильярде вокруг правильного семиугольника существуют самоподобия.

Теорема 2 Во внешнем бильярде вокруг правильного семиугольника существует как минимум счетное число аперiodических орбит, расположенных на ограниченной области.

Теорема 3 Во внешнем бильярде вне правильного 18-угольника существует аперiodическая точка.

Был исследован внешний бильярд вне правильного семиугольника, была составлена карта исследованных областей, которые задаются самоподобиями, исследование внешнего бильярда на всем внешнем бильярде было сведено к исследованию внешнего бильярда на двух фигурах, образующихся исключением траекторий фигур, для которых было найдено самоподобие.

Также благодаря компьютерным экспериментам, был исследован граф преобразований первого возвращения для случаев различных n , были получены его точные размеры для $n = 5, 6, 8, 10, 12$, а также его оценки снизу для $n = 7, 9, 11$. Существуют некоторые предпосылки к тому, чтобы для этих случаев граф преобразований первого возвращения был бесконечен, или по крайней мере на несколько порядков больше, чем для более простых случаев.

Код для поиска преобразований первого возвращения и вычисления орбит фигур во внешнем бильярде был адаптирован для внешнего бильярда вне произвольного правильного n - угольника, также были ускорены некоторые методы и функции для оптимальной работы с выпуклыми фигурами.

8. Заключение

В рамках проведенных работ были адаптированы метод исследования внешних билиардов вокруг правильных многоугольников для случаев $n=9$ и выше. Было произведено исследование внешнего билиарда вокруг правильного семиугольника, также в нём было обнаружено самоподобие и счетное количество различных апериодических орбит. Были полностью описаны некоторые части внешнего билиарда вокруг семиугольника, которые поддались простому описанию в терминах преобразования первого возвращения.

Была исследована также структура внешних билиардов вокруг многоугольников порядка $n = 11, 13, 15$, было подтверждено, что для этих случаев структура внешнего билиарда в терминах преобразования первого возвращения значительно усложняется, и не поддается простому описанию.

Был значительно ускорен код, применяемый для исследования структуры внешнего билиарда. Были интегрированы модули `sage` в написанный код на Python, произведено ускорения вычислений, основанное на кэшировании результатов и упрощение вычислений в случае выпуклых частей в преобразовании первого возвращения.

Список литературы

1. Moser J. Outer billiards on kites // Princeton, NJ. — 1973. — Т. 77.
2. С. Л. Табачников. Внешние бильярды // УМН. — 1993. — Т. 48, вып. 6. — С. 75—102.
3. Tabachnikov S. On the dual billiard problem // Advances in Mathematics. — 1995. — Т. 115, вып. 2. — С. 221—249.
4. Tabachnikov S. Geometry and Billiards // Providence, RI : American Mathematical Society. — 2005. — Т. 30.
5. Lowenstein J. H., Vivaldi F. Renormalization of one-parameter families of piecewise isometries // Dynamical Systems. — 2016. — Т. 31, вып. 4. — С. 393—465.
6. Goetz A., Quaz A. Global properties of a family of piecewise isometries // Ergodic Theory Dynamical Systems. — 2009. — Т. 39, вып. 2. — С. 545—568.
7. N. Bedaride, J. Cassaigne. Outer billiards outside regular polygons // Lond. Math. Soc. (2). — 2011. — Т. 84, вып. 2. — С. 303—324.
8. Ф. Д. Рухович. Внешние бильярды вне правильных многоугольников: ручной случай // Изв. РАН. Сер. матем. — 2022. — Т. 86, вып. 3. — С. 105—160.
9. Schwartz R. E. Survey Lecture on Billiards //. — ИМС, 2022. — С. 20—21.
10. Ф. Д. Рухович. Внешние бильярды вне правильных многоугольников: множества полной меры, апериодические точки и множества периодов. — 2019.